دورة الفصل الثالث 2016

* السؤال الأول

$W = \{(0,b,c) \ ; b,c \in R\}$

$U = \{(a,b,c) \ ; a = b = c \in R\}$

① أثبت أن الزمرة U تشكل مجموعة جزئية في الحقل R^3

② أثبت أن $R^3 = U \oplus W$

الحل :

① $(0,0,0) \in V \Rightarrow V \neq \emptyset$

$u = (a,b,c) \ ; a = b = c \Rightarrow u(a,a,a) \in V$

$v = (b,b,b) \in V$

$u - v = (a-b, a-b, a-b) \in V$

$\forall \alpha \in R , \forall u \in V \quad \alpha u = \alpha(a,a,a)$ ومنه

$(\alpha a, \alpha a, \alpha a) \in V$

إذاً V فضاء جزئي في R^3

② $\forall (a,b,c) \in R^3 , (a,b,c) = (a,a,a) + (0,b-a,c-a)$

$(a, b-a, c-a) \in W , (a,a,a) \in U$

ومنه بالتعويض $(a,b,c) \in U + W$ إذاً $R^3 = U + W$

$(a,b,c) \in U \cap W \Rightarrow (a,b,c) \in U , (a,b,c) \in W$

$a = b = c \quad , a = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$

$U \cap W = \{0\}$

ومنه

$U \cap W = \{0\} , R^3 = U + W$

$R^3 = U \oplus W$

Scanned by CamScanner

السؤال الثاني:

① أثبت أن f هومومورفيزم مودولي

② أثبت أن $M/B \cong A$

③ أثبت أن $0 \to A \to A \oplus B \to B \to 0$

الحل

① أي لأي عنصر x في $M = A \oplus B$ يكتب بصورة وحيدة على الشكل

$x = a + b$ حيث $a \in A$ ، $b \in B$ ومنه ثم العلاقة

$f(x) = a$ تعرف تطبيقاً من M في A.

$\forall \alpha, \beta \in R$ ، $f[\alpha(a_1 + b_1) + \beta(a_2 + b_2)]$

$= f[(\alpha a_1 + \beta a_2) + (\alpha b_1 + \beta b_2)]$

حيث أن A و B مودولات جزئية في M فإن

$\alpha b_1 + \beta b_2 \in B$ ، $\alpha a_1 + \beta a_2 \in A$

وبالتالي حسب تعريف f

$f(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y$

$= \alpha f(a_1 + b_1) + \beta f(a_2 + b_2)$

$= \alpha f(x) + \beta f(y)$

إذاً f هومومورفيزم مودولي من M في A.

② f غامر حيث $\forall a \in A$ يوجد $a + 0 \in A + B$ حيث

$f(a + 0) = a$ ومنه ثم

$\text{im} f = A$ أيضاً لدينا $\ker f = B$ لأن

$\ker f = \{ x = a + b \in M : f(x) = 0 \}$ ، $= \{ x \in M : f(a+b) = a = 0$

$\forall b \in B \}$

وحسب المبرهنة الأساسية الأولى

$M / \ker f \cong \text{im} f \Rightarrow M/B \cong A$

Scanned by CamScanner

(3)

$A \oplus B \xrightarrow{\pi} B \to 0$ تامة لأن π شاملة

$A \xrightarrow{i} A \oplus B \xrightarrow{\pi} B$ تامة لأن $\ker \pi = \operatorname{Im} i$

$0 \to A \xrightarrow{i} A \oplus B$ تامة لأن i متباين

ومنه فإن المتتاليات الجزئية تامة أي أن المتتالية

$0 \to A \xrightarrow{i} A \oplus B \xrightarrow{\pi} B \to 0$ تامة

* السؤال الثالث:

أثبت أنه V تحوي مودولاً جزئياً بسيطاً

الحل:

إن V تحوي مودولاً جزئياً أعظمياً مثل C لأن M نصف بسيط فيوجد M_1 مودول جزئي في M بحيث أن $M = C \oplus M_1$ ومنه ينتج

$$V = M \cap V = (C \oplus M_1) \cap V = (C \cap V) \oplus (M_1 \cap V)$$

$$= C \oplus (M_1 \cap V)$$

$V/C \cong M_1 \cap V$ ومنه C جزئي أعظمي في V فإن V/C بسيط

وبالتالي فإن $M_1 \cap V$ بسيطاً أيضاً وبالتالي فإن

أي أن $V \supseteq M_1 \cap V$ فإن V تحوي مودولاً جزئياً بسيطاً.

* السؤال الرابع: M مودول في الحلقة الواحدية R

M نوثري

M تحقق الشرط الأعظمي } تكافؤ الشرطين

مكرر

Scanned by CamScanner